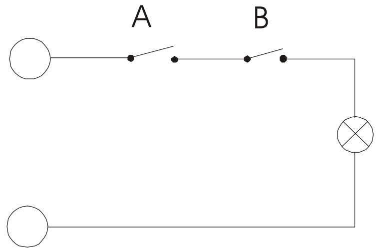
BOOLSCHE ALGEBRA / SCHALTUNGSALGEBRA

1. Digitale Grundschaltungen

1.1 UND/AND-SCHALTUNG

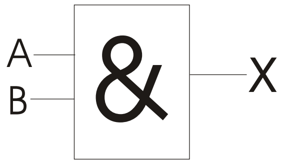
Schaltbild



Wertetabelle

A	B	X
0	0	**0**
1	0	**0**
0	1	**0**
1	1	**1**

Blockschaltbild

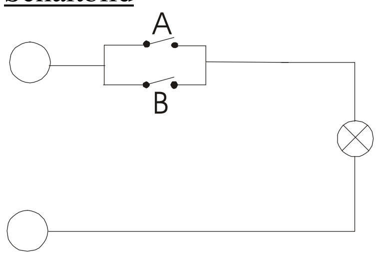


Formel

$x = a \wedge b$

1.2 ODER/OR-SCHALTUNG

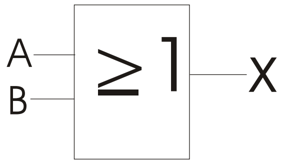
Schaltbild



Wertetabelle

A	B	X
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**1**

Blockschaltbild

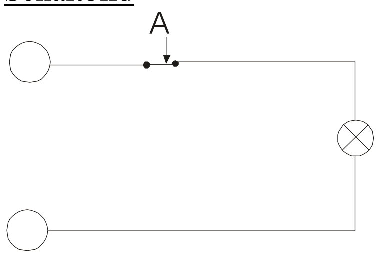


Formel

x = a ∨ b

NICHT/NOT-SCHALTUNG

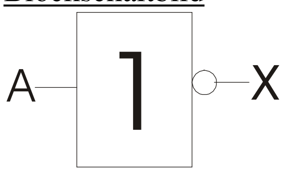
Schaltbild



Wertetabelle

A	**X**
0	**1**
1	**0**

Blockschaltbild

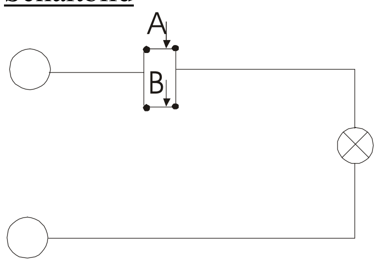


Formel

$$x = \overline{a}$$

NAND (NOT AND)-SCHALTUNG

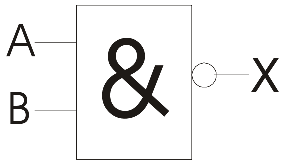
Schaltbild



Wertetabelle

A	B	**X**
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**0**

Blockschaltbild

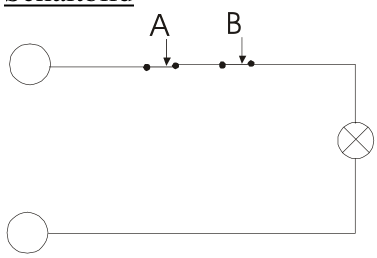


Formel

$$\overline{x=a\wedge b}$$

NOR (NOT OR)-SCHALTUNG

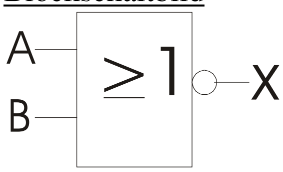
Schaltbild



Wertetabelle

A	B	**X**
0	0	**1**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**0**

Blockschaltbild

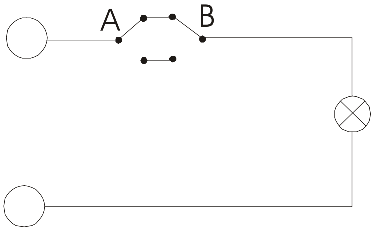


Formel

$$\overline{x=a\vee b}$$

ÄQUIVALENZ (N-EXOR)-SCHALTUNG

Schaltbild

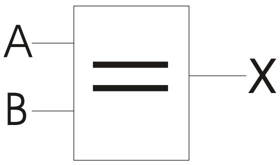


Wertetabelle

A	B	**X**
0	0	**1**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

(Wechselschaltung)

Blockschaltbild



Formel

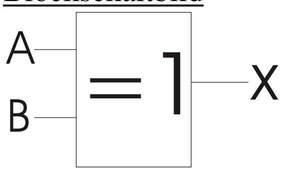
$$x=(a\wedge b)\vee(\bar{a}\wedge\bar{b})$$

ANTIVALENZ (X-OR)-SCHALTUNG

Wertetabelle

A	B	**X**
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**0**

Blockschaltbild



Formel

$$x=(\bar{a}\wedge b)\vee(a\wedge\bar{b})$$

2. Umformungsgesetze

Assoziativgesetz

UND:
Aus $x = a \wedge b \wedge c$ wird $x = (a \wedge b) \wedge c$

ODER:
Aus $x = a \vee b \vee c$ wird $x = (a \vee b) \vee c$

Distributivgesetz

$x = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

$= a \wedge (b \vee c)$

Der Morgansche's Gesetz
Umkehrung einer Formel in drei Schritten:

Beispiel: $x = a \wedge b$

1. Umkehrung aller Operatoren

$x = a \vee b$

2. Invertieren der einzelnen Variablen

$x = \bar{a} \vee \bar{b}$

3. Invertieren des gesamten Terms

$x = \overline{\bar{a} \vee \bar{b}}$

3. Synthese von Schaltmustern
Beispiel: 3 Motoren; Alarm soll gegeben werden, sobald mehr zwei ausfallen.

Vorgehensweise:

1. Bestimmen der notwendigen Variablen
3 Motoren = a ; b ; c
Motor läuft = Zustand "1"
Alarm = x
Alarm an = Zustand „1“

2. Aufstellen einer Wertetabelle

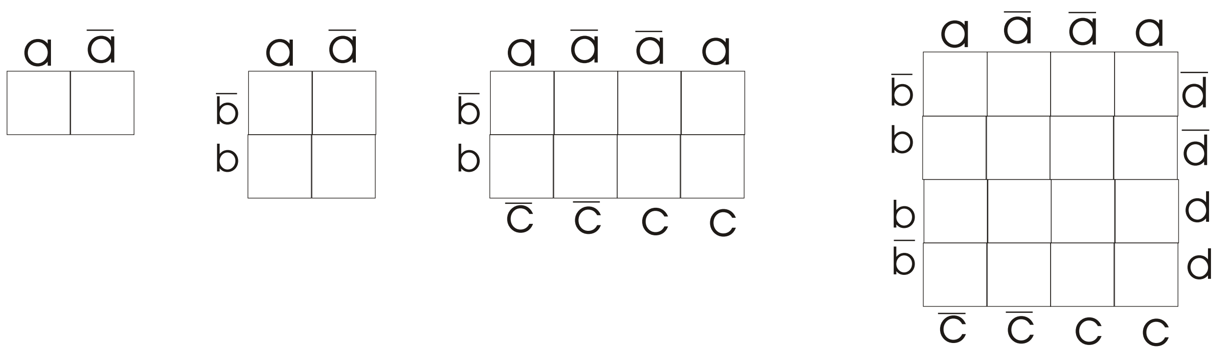
a	b	c	x	
0	0	0	1	$x = \bar{a} \land \bar{b} \land \bar{c}$
0	0	1	1	$x = \bar{a} \land \bar{b} \land c$
0	1	0	1	$x = \bar{a} \land b \land \bar{c}$
0	1	1	0	
1	0	0	1	$x = a \land \bar{b} \land \bar{c}$
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	0	

3. Aufstellen der Gleichung
Bei jedem x=1-Zustand wird eine Formel gebildet (s.o.). Diese Formeln werden durch ODER-Operatoren verknüpft, da einer dieser Zustände ausreicht, den Alarm zu betätigen.

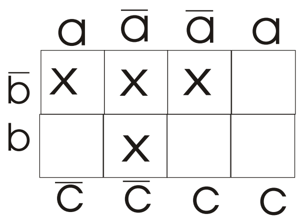
$$x = (x = \bar{a} \land \bar{b} \land \bar{c}) \;\; v \;\; (x = \bar{a} \land \bar{b} \land c) \;\; v \;\; (x = \bar{a} \land b \land \bar{c}) \;\; v \;\; (x = a \land \bar{b} \land \bar{c})$$

Diese Form nennt sich Disjunktive Normalenform (DNF).

4. Vereinfachen
Die Formel kann entweder manuell (Ausklammern) vereinfacht werden, oder über die KV-Tafeln. Es gibt KV- Tafeln für 1 bis 4 Variablen:



Für eine jede Zustandsbeschreibung (eine Klammer) in der Gleichung wird nun ein Kreuz in der jeweiligen Matrix gesetzt. Die Matrix für die Beispielgleichung sieht so aus:



Aus einer solchen KV-Tafel lässt sich folgendes ablesen:
Felder mit Kreuz, die nebeneinander bzw. untereinander liegen, können zusammengefasst werden, aber nur in 2-4-8-16er-Blöcken. Wenn in einem solchen Block eine Variable negiert *und* nicht negiert vorkommt, fällt diese weg. Variablen, denen kein Kreuz zugeordnet ist, fallen ebenfalls weg.

Die in einem Block übrig bleibenden Variablen werden UND- verknüpft, die Blöcke untereinander werden mit ODER verknüpft.
Die Beispielaufgabe wird wie folgt ausgelesen:

BLOCK 1

	a	$\bar{a}$	$\bar{a}$	a
$\bar{b}$	X	X	X	
b		X		
	$\bar{c}$	$\bar{c}$	c	c

$x = b \wedge \bar{c}$

(a kommt in beiden Varianten vor und fällt weg. Es bleiben b und c, jeweils negiert.)

BLOCK 2

	a	$\bar{a}$	$\bar{a}$	a
$\bar{b}$	X	X	X	
b		X		
	$\bar{c}$	$\bar{c}$	c	c

$x = \bar{a} \wedge \bar{b}$

(c kommt in beiden Varianten vor und fällt weg. Es bleiben die negierten a und b).

BLOCK 3

	a	$\bar{a}$	$\bar{a}$	a
$\bar{b}$	X	X	X	
b		X		
	$\bar{c}$	$\bar{c}$	c	c

$x = \bar{a} \wedge \bar{c}$

(b fällt weg, a und c bleiben negiert.)

Zusammengesetzt mit ODER lautet die nun vereinfachte Gleichung:

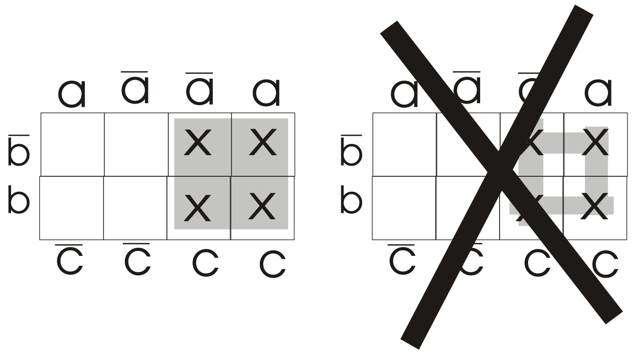
$$x = (\bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$$

Weitere Regeln zur Blockbildung:

→ Ein Block kann auch ‚über die Tafel hinausgehen' :

	a	$\bar{a}$	$\bar{a}$	a
$\bar{b}$	X			X
b				
	$\bar{c}$	$\bar{c}$	c	c

→ Ein großer Block muss nicht zusätzlich in kleine unterteilt werden:



Das Blockschema gilt nur für DNF-Formen; Diese werden aus 1-Lösungen gewonnen. Wenn jedoch alle Zustände –bis auf einen- einer Wertetabelle 1 sind, kann man aus der Null-Lösung auch eine KNF bilden. Hierzu wird die Gleichung eines negierten x umgewandelt und so in die KNF-Form gebracht:

$$\overline{x} = a \wedge \overline{b} \wedge c$$

$$\overline{\overline{x}} = \overline{a \wedge \overline{b} \wedge c}$$

$$x = \overline{a} \vee b \vee \overline{c}$$

<u>5. Erstellen des Schaltbildes</u>

Die UND- und ODER- Komponenten werden nun in ein Schaltbild gebracht. Der Übersichtlichkeit wegen verwendet man links eine Matrix mit den Variablen: